

МЕХАНИКА НА ФЛУИДИ

Предметен наставник: Вон. Проф. Д-р ВИОЛЕТА ЃЕШОВСКА

3

КИНЕМАТИКА НА ФЛУИДИТЕ

МЕХАНИКА НА ФЛУИДИ



КИНЕМАТИКА НА ФЛУИДИТЕ

Делот од ДИНАМИКАТА на флуиди кој ги изучува движењето на флуидите како функција од просторот и времето се нарекува КИНЕМАТИКА НА ФЛУИДИТЕ

Кинематиката ги определува геометриските карактеристики на промените на флуидните честички и флуидот како целина без да невлегува во причините зошто настанале тие промени

Флуидите се движат транслаторно и вртежно (исто како цврстата материја):

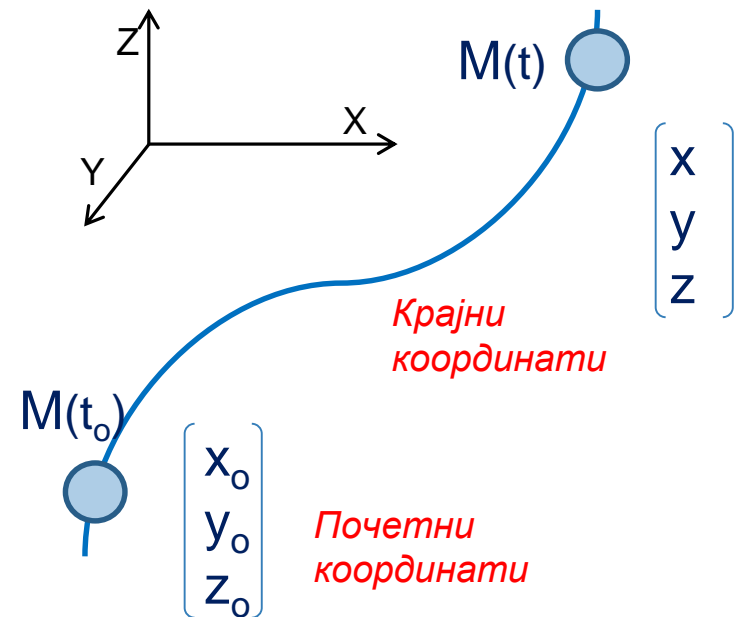
- ја менуваат својата положба,
- ја менуваат формата,
- го менуваат волуменот.

За флуидно струјно поле со познати својства, концептите на кинематиката ја определуваат положбата на флуидните честички во просторот и времето

Постојат два начина за определување на оваа положба

Методот на Lagrange

Методот на Euler



Lagrange-ови променливи

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t) = f_1(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$y = y(x_0, y_0, z_0, t) = f_2(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$z = z(x_0, y_0, z_0, t) = f_3(x_0, y_0, z_0, t)$$

$$\rho = \rho(x_0, y_0, z_0, t_0)$$

Проекции на елементарните поместувања: (dx) , (dy) , (dz)

$$u = \frac{dx}{dt}$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$w = \frac{dz}{dt}$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Патот кој го опишува една честичка-ПАТНА
ЛИНИЈА ИЛИ ТРАЕКТОРИЈА

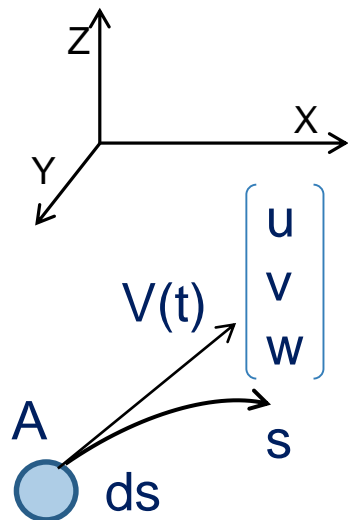
$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

Euler-ови променливи

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad \rho = \rho(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$



Векторот на брзините во струјното поле се
СТРУЈНИ ЛИНИИ ИЛИ СТРУЈНИЦИ

Проекции на векторот на брзината

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

и растојание

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{u}{V};$$

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V};$$

$$\cos \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{w}{V}$$

Критериуми за класификација на движењето:

- Време
- Простор
- Вектор на брзина
- Густина
- Вискозитет

Критериум- Време

Ако параметрите на текот (брзина, притисок и густина) не се менуваат во тек на време

$$\partial V / \partial t = 0$$



Стационарно течење



Рамномерни

$$\partial V / \partial s = 0$$

Нерамномерни

$$\partial V / \partial s \neq 0$$

Критериум
простор

Ако параметрите на текот (брзина, притисок и густина) се менуваат во тек на време

$$\partial V / \partial t \neq 0$$



Нестационарно течење

Критериум- вектор на брзинаЕднодимензионално или *линиско* $V=V(x,t)$ Дводимензионално или рамнинско $V=V(x,y,t)$ Тродимензионално или просторно $V=V(x,y,z,t)$

Ако честичките ротираат околу некоја оска → Вртежно течење

Ако честичките не ротираат околу некоја оска → Безвртежно течење

**Критериум
ротација**

Ако струјното поле од сите страни е ограничено со цврсти граници без контакт со надворешниот атмосферски притисок

→ Течење под притисок
(резервоари и цевководи)

Ако струјното поле од сите страни има слободна површина во контакт со надворешниот атмосферски притисок

→ Течење без притисок
(канални, реки, езера)**Критериум
притисок**

Критериум - вискозитет

ВИСКОЗИТЕТ



Сила од триење

$$F_{\text{триење}} = \mu u L$$

Односот на силата од триење и силата од инерција



Reynolds-овиот број

$$R_e = \frac{F_{\text{in}}}{F_{\text{триење}}} = \frac{\rho u^2 L^2}{\mu u L} = \frac{u L}{\nu}$$

V-кинематска вискозност,
L-карактеристична должинаЗа цевки: $L=d$ За отворени текови: $L=y$ / $L=R$ ($R=A/O$ -хидраулички радиус)

Турбулентно

 $R_e > 2000$ за цевки
 $R_e > 500$ за отворени канали

Ламинарно

 $R_e \leq 2000$ за цевки
 $R_e \leq 500$ за отворени канали

Критериум – густина на флуидот

ГУСТИНАТА



Хомогени течења $\rho = \text{const.}$

Нехомогени течења $\rho \neq \text{const.}$

Односот на градиентот на густината и градиентот на брзината во вертикална насока

Richardson-овиот број

$$R_i = \frac{g(\partial\rho/\partial y)}{\rho(\partial u/\partial y)^2}$$

Нехомогеноста е стабилна



$R_i \gg \gg \gg$

Флуидната средина е хомогена



$R_i \rightarrow 0$

Критериум - гравитација

ГРАВИТАЦИЈА



Сила од тежина

$$F_{\text{тежина}} = \rho g L^3$$

Односот на силата од тежина и силата од инерција



Froud-овиот број

$$F_r = \frac{F_{\text{in}}}{F_g} = \frac{\rho u^2 L^2}{\rho L^3 g} = \frac{u^2}{gL}$$

$$F_r = \frac{u}{\sqrt{gL}}$$

L-карактеристична должина

За цевки: $L=d$ За отворени текови: $L=y$ / $L=R$ ($R=A/O$ -хидраулички радиус)

субкритично



$$Fr < 1$$

суперкритично



$$Fr > 1$$

критично



$$Fr = 1$$

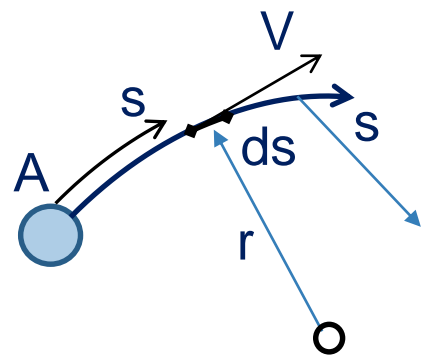
БРЗИНА И ЗАБРЗУВАЊЕ

Векторски големини со интензитет и правец

Брзината е определена со патот што го поминува за определено време

Матријалниот извод на брзината е забрзувањето

Векторот на брзината е тангента на струјната линија s



Струјна линија

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$V = V(s, t)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

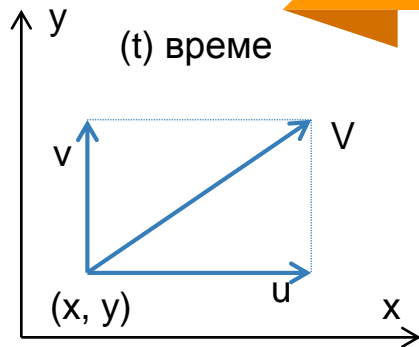
V

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Конвективен член

Локален член

БРЗИНА И ЗАБРЗУВАЊЕ

Векторски големини со интензитет и правец

$$u = \frac{dx}{dt}$$

Компонента на брзината во x насока

$$u = u(x, y, t)$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

Компонента на брзината во y насока

$$v = v(x, y, t)$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial t} dt \quad / dt$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad / dt$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

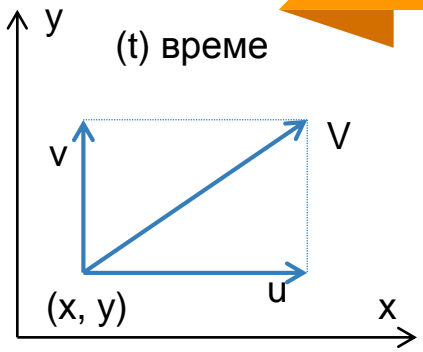
$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial t}$$

БРЗИНА И ЗАБРЗУВАЊЕ

Векторски големини со интензитет и правец



$$u = \frac{dx}{dt} \quad \text{Компонента на брзината во x насока}$$

$$u = u(x, y, t)$$

$$v = \frac{dy}{dt} \quad \text{Компонента на брзината во y насока}$$

$$v = v(x, y, t)$$

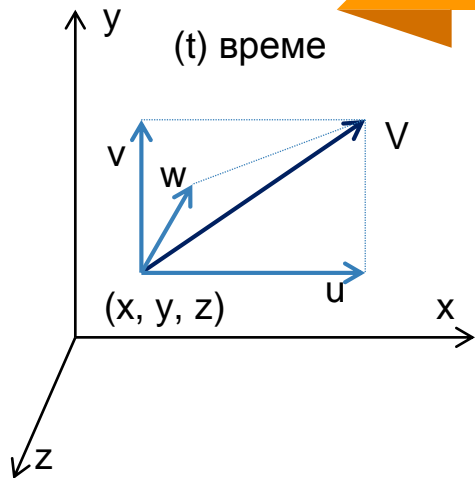
$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial t}$$

Конвективни членови

Локални членови

БРЗИНА И ЗАБРЗУВАЊЕ

Векторски големини со интензитет и правец

$$u = \frac{dx}{dt}$$

Компонента на брзината во x насока

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

Компонента на брзината во y насока

$$v = v(x, y, z, t)$$

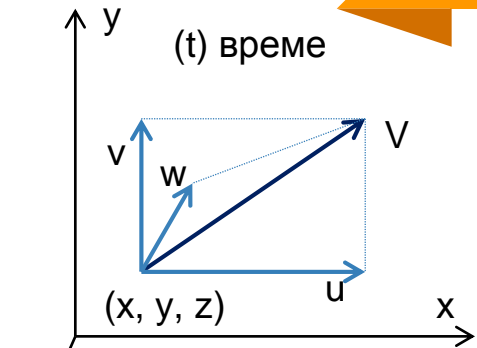
$$w = \frac{dz}{dt}$$

Компонента на брзината во z насока

$$w = w(x, y, z, t)$$

БРЗИНА И ЗАБРЗУВАЊЕ

Векторски големини со интензитет и правец



$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

$$a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w + \frac{\partial w}{\partial t}$$

Конвективни членови

Локални членови

$$u = \frac{dx}{dt}$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

$$w = \frac{dz}{dt}$$

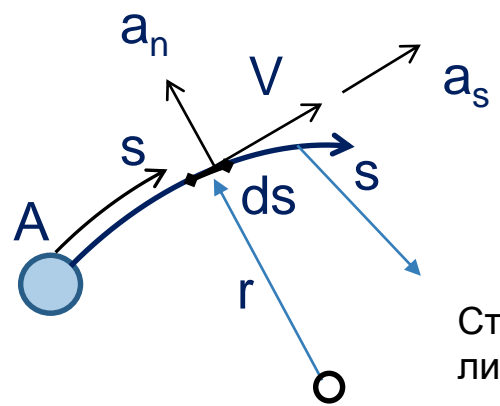
БРЗИНА И ЗАБРЗУВАЊЕ

Векторски големини со интензитет и правец

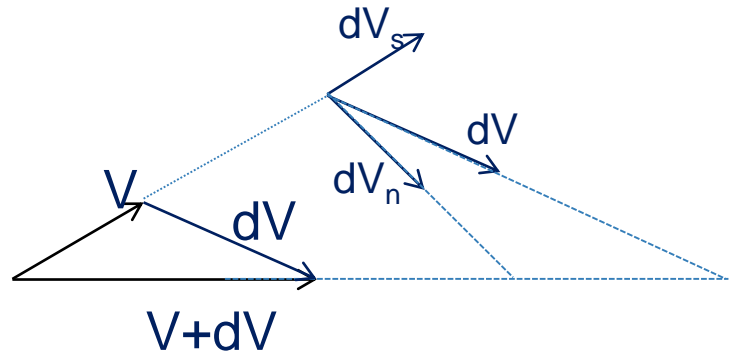
$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$a = \frac{dV}{dt}$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt$$



Струјна линија



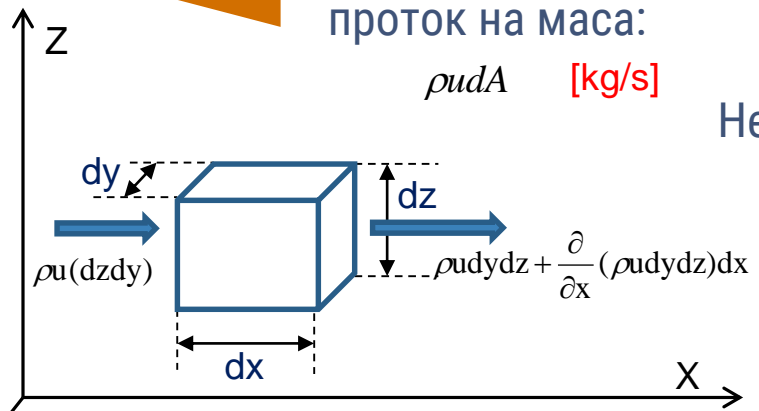
$$\frac{dV_n}{V} = \frac{ds}{r}$$

$$\frac{dV_n}{ds} = \frac{V}{r}$$

$$a_n = \frac{dV_n}{dt} = \frac{V^2}{r} + \frac{\partial V_n}{\partial t}$$

Локално нормално забрзување

РАВЕНКА НА КОНТИНУИТЕТ



проток на маса:
 $\rho u dA$ [kg/s]

влез: $\rho u(dzdy)$ излез: $\rho u dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz) dx$

Нето проток на маса: влез - излез

$$\rho u(dydz) - \left[\rho u dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz) dx \right]$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}(\rho u dy dz) dx \quad \text{во насока } x$$

$$- \frac{\partial}{\partial y}(\rho v dx dz) dy \quad \text{во насока } y$$

$$- \frac{\partial}{\partial z}(\rho w dx dy) dz \quad \text{во насока } z$$

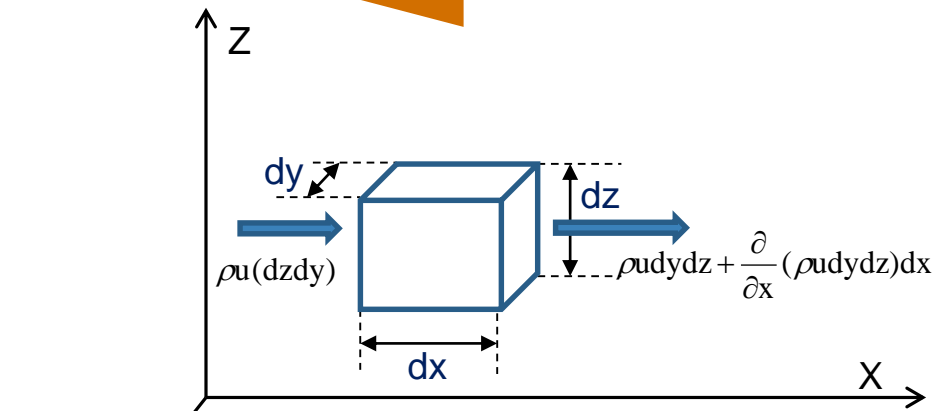
Промената на масата во внатрешноста на контролниот волумен е:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dx dy dz$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dx dy dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

РАВЕНКА НА КОНТИНУИТЕТ



$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ако течењето е стационарно $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Ако флуидот е нестислив $\rho = \text{const.}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad ; \rho \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Ако течењето е еднодимензионално

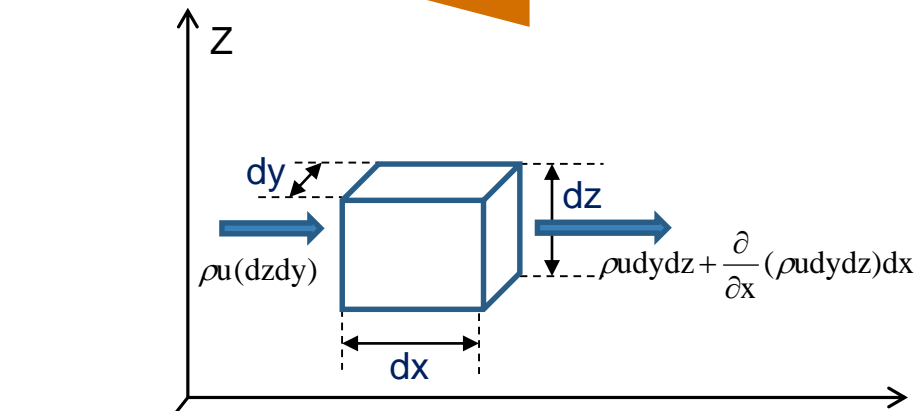
$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Ако течењето е дводимензионално $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

РАВЕНКА НА КОНТИНУИТЕТ



Равенката на континуитет за едодимензионално стационарно течење за нестислив флуид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Равенката на континуитет за тродимензионално нестационарно течење за стислив флуид:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Равенката на континуитет за тродимензионално стационарно течење за стислив флуид:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

Равенката на континуитет за тродимензионално стационарно течење за нестислив флуид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Равенката на континуитет за дводимензионално стационарно течење за нестислив флуид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

РАВЕНКА НА КОНТИНУИТЕТ

Равенката на континуитет за еднодимензионално стационарно течење за нестислив флуид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Го определува стационарното рамномерно/нерамномерно линиско течење:

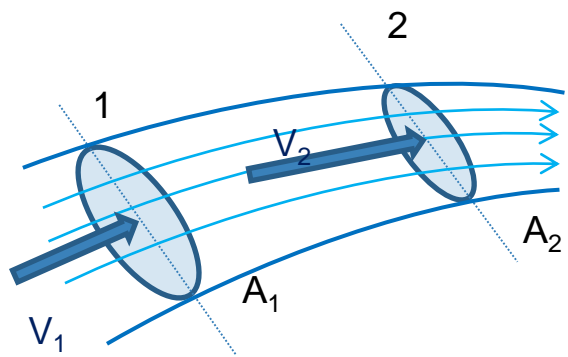
$$Q = \int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV = \int_A u dA$$

(Q) – проточно количество

Волумен на флуид што поминува во единица време низ пресек зафатен со течење (A)

Мерна единица:

$$[m^3/s]; [l/s]$$



$$Q = A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2 \quad (V_1) \text{ и } (V_2) \text{ – средни брзини во пресек 1 и 2}$$

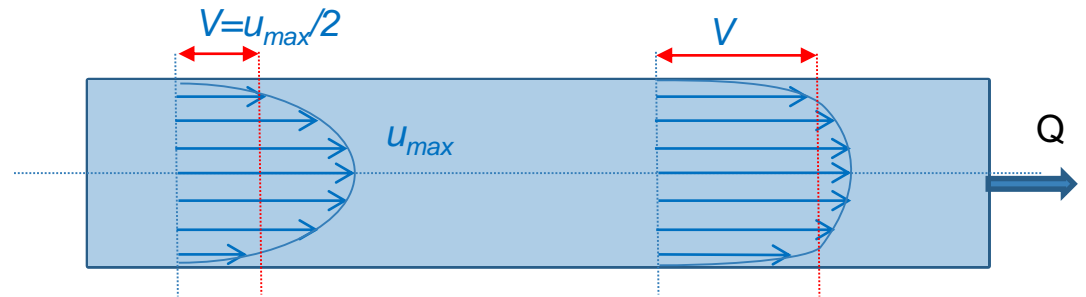
$$V = \frac{\int_A u dA}{\int_A dA} = \frac{\int_A u dA}{A}$$

РАВЕНКА НА КОНТИНУИТЕТ

$$Q = A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2$$

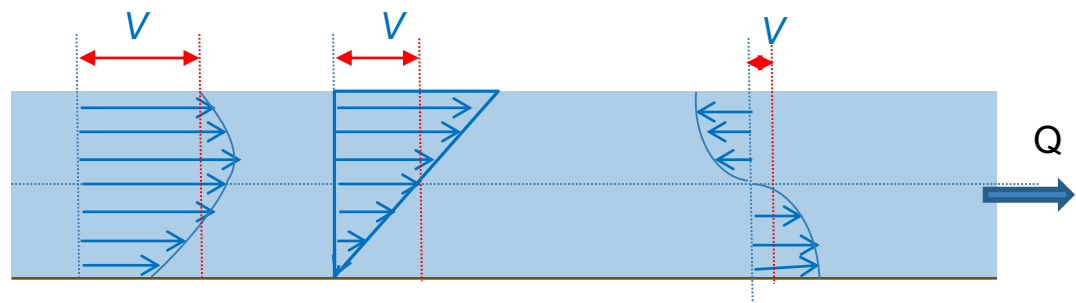
(V_1) и (V_2) – средни брзини во пресек 1 и 2

$$V = \frac{\int_A u dA}{\int_A dA} = \frac{\int u dA}{A}$$



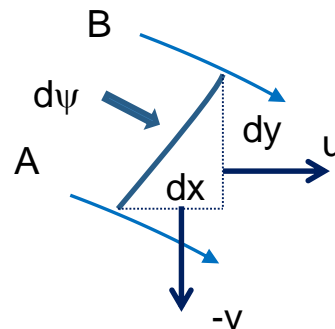
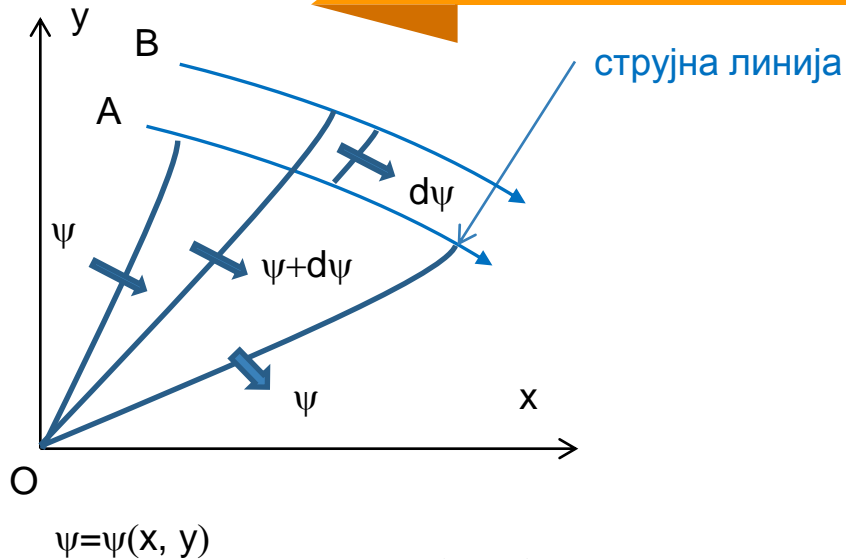
Ламинарно течење

Турбулентно течење



Отворени текови

СТРУЈНА ФУНКЦИЈА



$$d\psi = -v dx + u dy$$

$$\psi = \psi(x, y)$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

-v u

$$\psi = \int \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + C$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

Laplace-ов оператор

Функција на струјна линија

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = \Delta^2 \cdot \psi = 0$$

Laplace-ова равенка

ПОТЕНЦИЈАЛ НА БРЗИНАТА

Функција ($\varphi = \varphi(x, y)$) чии негативни изводи по (x) и (y) се брзините во тии насоки

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \Delta^2 \cdot \varphi = 0$$

