МЕХАНИКА НА ФЛУИДИ

Предметен наставник: Вон. Проф. Д-р ВИОЛЕТА ЃЕШОВСКА

4

ДИНАМИКА НА ФЛУИДИТЕ

ОСНОВНИ ПРИНЦИПИ

Во Механиката на флуиди се користат три основни принципи за одржување и конзервација

Одржување на масата → *РАВЕНКАТА НА КОНТИНУИТЕТ*

Одржување на енергијата → *ЕНЕРГЕТСКАТА РАВЕНКА (Бернулиева р-ка)*

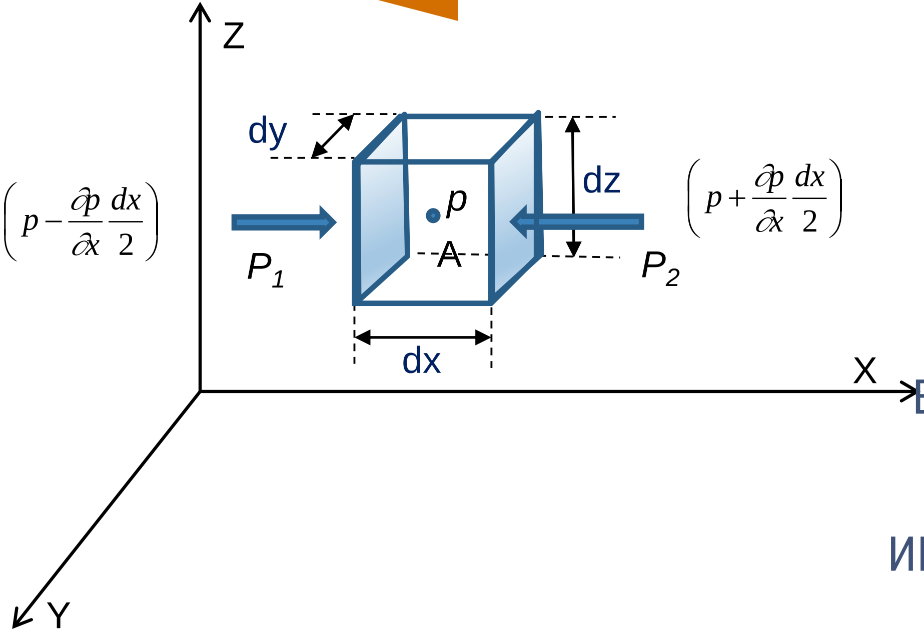
Одржување на количеството на движење → *РАВЕНКАТА ЗА КОЛИЧЕСТВО НА ДВИЖЕЊЕ (нема ограничување во примена)*

Одржување на енергијата

Одржување на количеството на движење

} *ДИНАМИЧКАТА РАВЕНКА (рамнотежа на силите)*

ОСНОВНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ



СИЛИ ОД ПРИТИСОК

$$P_1=\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz \qquad P_2=\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz$$

$$P_X=P_2-P_1=\cancel{pdydz}+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}dydz-\cancel{pdydz}+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}dydzp$$

$$P_X=\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

ВОЛУМЕНСКИ СИЛИ =МАСА ПО ЗАБРЗУВАЊЕ

$$F_X=\rho\cdot V\cdot X=\rho\cdot dxdydz\cdot X$$

ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА=МАСА ПО ЗАБРЗУВАЊЕ

$$\mathrm{F_I}=\mathrm{M}\cdot \mathrm{a_x}=\rho\cdot \mathrm{V}\cdot\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}=\rho\cdot \mathrm{dxdydz}\cdot\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}$$

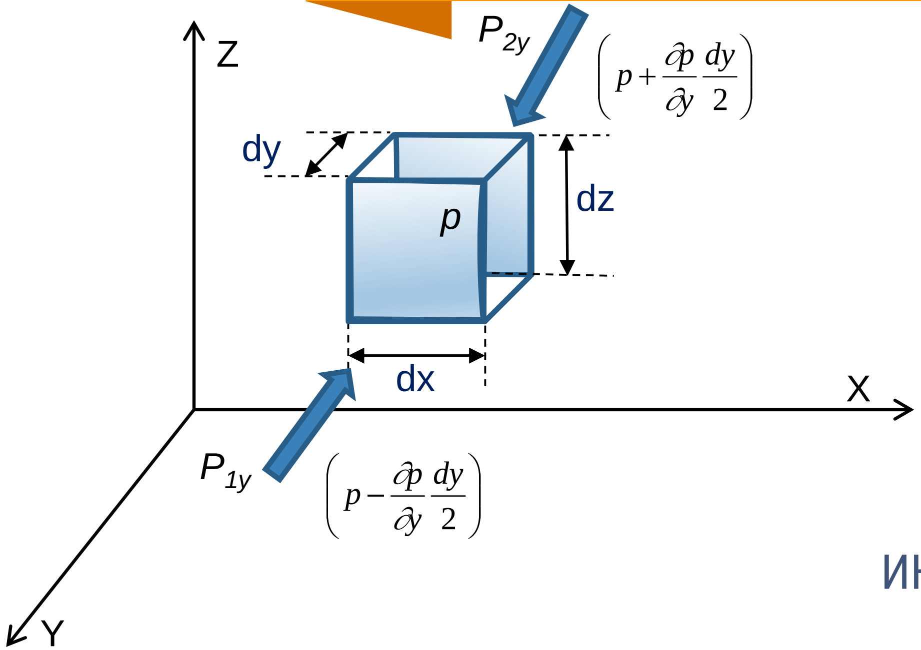
СИЛИ ОД ПРИТИСОК-ТЕЖИНА=ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА

$$\mathrm{F_X}-\mathrm{P_X}=\mathrm{F_i}\Rightarrow\rho\cdot \mathrm{dxdydz}\cdot \mathrm{X}-\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dxdydz}=\rho\cdot \mathrm{dxdydz}\cdot\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}$$

/ :M=ρdxdydz

$$\mathrm{X}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{dt}}$$

ОСНОВНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ



СИЛИ ОД ПРИТИСОК

$$P_{1y} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz \qquad P_{2y} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz$$

$$P_Y = P_{2y} - P_{1y} = \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz - \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz$$

$$P_Y = \frac{\partial p}{\partial y}dxdydz$$

ВОЛУМЕНСКИ СИЛИ =МАСА ПО ЗАБРЗУВАЊ

$$F_Y = \rho \cdot V \cdot Y = \rho \cdot dxdydz \cdot Y$$

ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА=МАСА ПО ЗАБРЗУВАЊЕ

$$\mathrm{F_I = M \cdot a_y} = \rho \cdot \mathrm{V} \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \rho \cdot \mathrm{dxdydz} \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}$$

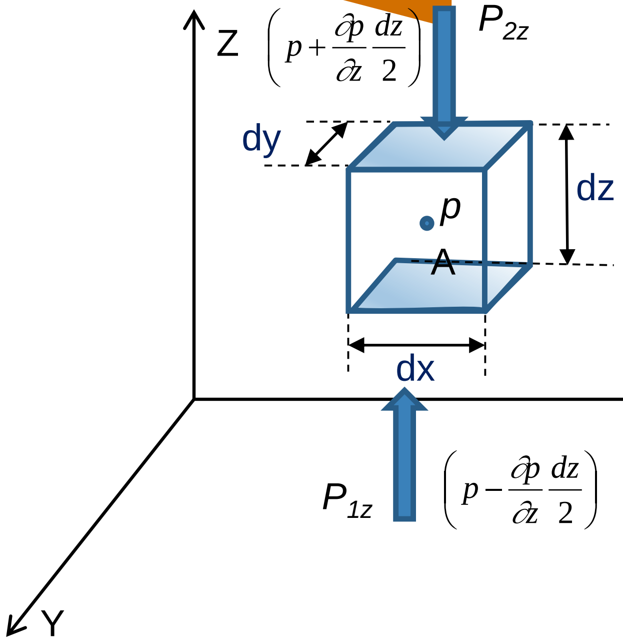
СИЛИ ОД ПРИТИСОК-ТЕЖИНА=ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА

$$\mathrm{F_y - P_y = F_i} \Rightarrow \rho \cdot \mathrm{dxdydz \cdot Y} - \frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{dxdydz} = \rho \cdot \mathrm{dxdydz} \cdot \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}$$

/ :M=ρdxdydz

$$\mathrm{Y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}}$$

ОСНОВНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ



СИЛИ ОД ПРИТИСОК

$$P_{1z}=\left(p-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy \qquad P_{2z}=\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

$$P_Z=P_{2z}-P_{1z}=\left(p+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy-\left(p-\frac{\partial p}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy$$

$$P_Z=\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz$$

ВОЛУМЕНСКИ СИЛИ =МАСА ПО ЗАБРЗУВАЊЕ

$$F_Z=\rho\cdot V\cdot Z=\rho\cdot dxdydz\cdot Z$$

ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА=МАСА ПО ЗАБРЗУВАЊЕ

$$F_I=M\cdot a_z=\rho\cdot V\cdot\frac{dw}{dt}=\rho\cdot dxdydz\cdot\frac{dw}{dt}$$

СИЛИ ОД ПРИТИСОК-ТЕЖИНА=ИНЕРЦИЈАЛНА СИЛА

$$F_z-P_z=F_i\Rightarrow\rho\cdot dxdydz\cdot Z-\frac{\partial p}{\partial z}dxdydz=\rho\cdot dxdydz\cdot\frac{dw}{dt}$$

/ :M=ρdxdydz

$$Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{dw}{dt}$$

ОСНОВНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Euler-ови равенки за движење на идеален флуид во имплицитна форма

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{du}{dt} \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{dv}{dt} \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{dw}{dt} \end{cases}$$

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w + \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w + \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w + \frac{\partial w}{\partial t}$$

ОСНОВНИ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Euler-ови равенки за движење на идеален флуид во експлицитна форма

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x}u + \dfrac{\partial u}{\partial y}v + \dfrac{\partial u}{\partial z}w + \dfrac{\partial u}{\partial t} \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}u + \dfrac{\partial v}{\partial y}v + \dfrac{\partial v}{\partial z}w + \dfrac{\partial v}{\partial t} \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial x}u + \dfrac{\partial w}{\partial y}v + \dfrac{\partial w}{\partial z}w + \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{cases}$$

Непознати големини:

Проекциите на брзини u, v, w

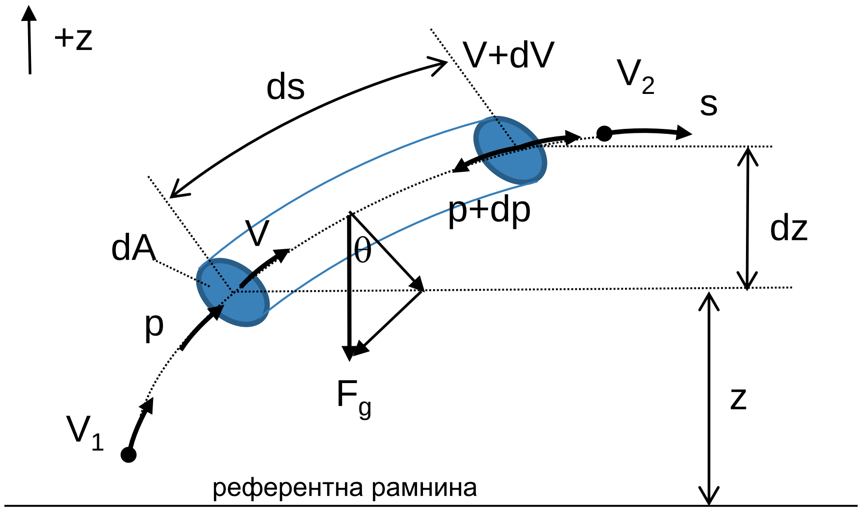
Притисокот-p

Густината-ρ

РАВЕНКАТА НА КОНТИНУИТЕТ $Q = A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2$

РАВЕНКА ОД УСЛОВИТЕ ЗА СТИСЛИВОСТ $\dfrac{p}{p_o} = \dfrac{\rho}{\rho_o}$ $\dfrac{p}{p_o} = \left(\dfrac{\rho}{\rho_o}\right)^k$

Енергетската равенка за идеален флуид



$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^{\,2}}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^{\,2}}{2g}+z_2$$

$$\frac{p}{\rho g}+\frac{V^2}{2g}+z=H=\mathrm{const}$$

Сила од притисок: $P=pdA-(p+dp)dA=-dpdA$

Сила од тежина: $F_g=\rho\cdot ds\cdot dA\cdot g\cdot\sin\theta$

$\sin\theta=dz/ds$

Сила од инерција: $Fi=M(dV/dt)$

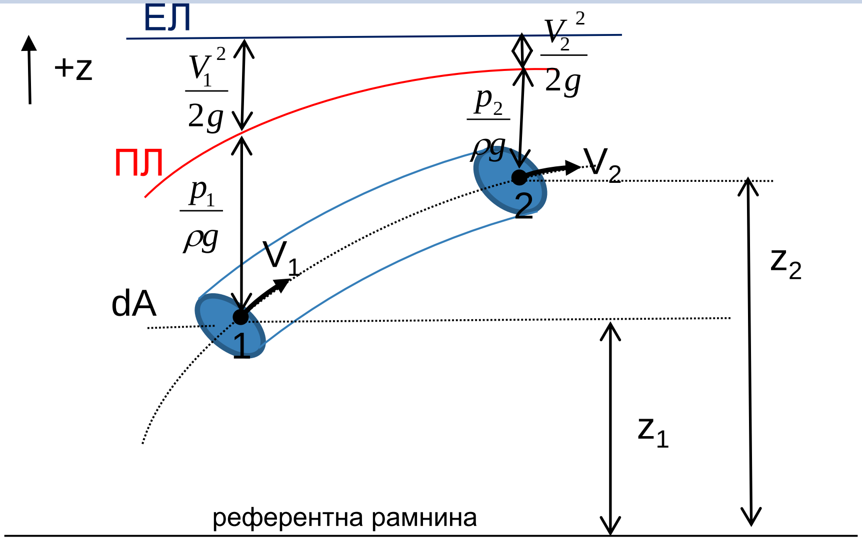
$V=V(s)$ ⇒ $\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{dV}{ds}V$

$$-dpdA-\rho\cdot dsdA\cdot g\left(\frac{dz}{ds}\right)=\rho\cdot dsdA\frac{dV}{ds}V \qquad /\rho dA$$

$$\frac{dp}{\rho}+VdV+g\cdot dz=0$$

$$\frac{dp}{\rho g}+d\left(\frac{V^2}{2g}\right)+dz=0$$

Енергетската равенка за идеален флуид



$$\frac{p_1}{\rho g}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\rho g}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2$$

$$\boxed{\frac{p}{\rho g}}+\boxed{\frac{V^2}{2g}}+\boxed{z}=\boxed{H}=\text{const}$$

Потисна енергија-пиезометриска височина

Кинетичка енергија-брзинска висина

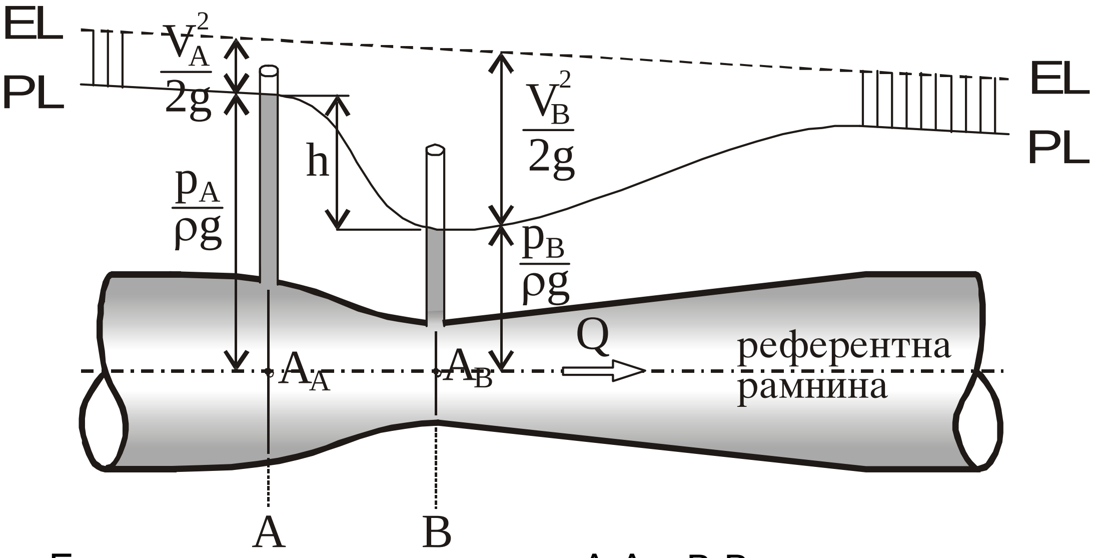
Потенцијална енергија-геодетска висина

Вкупна енергија

ПЛ-Пиезометриска линија
(потенцијална +потисна енергија)

ЕЛ-Енергетска линија
(вкупната енергија)

Практична примена на енергетската равенка-Venturi-ев мерач



Енергетска равенка во пресек А-А и В-В во однос на референтната рамнина:

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A=\frac{p_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B$$

$z_A=z_B=0$

$Q=A_AV_A=A_BV_B \Rightarrow V_B=V_AA_A/A_B$

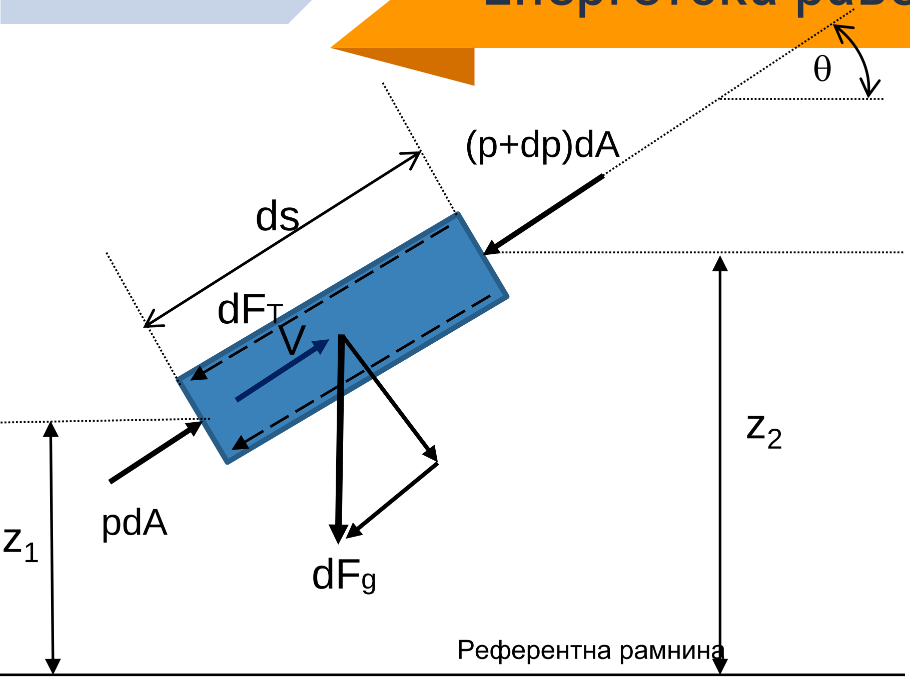
$$\frac{p_A}{\rho g}-\frac{p_B}{\rho g}=\frac{V_A^2}{2g}\left[\left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2-1\right]$$

$$V_A=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2-1}}\sqrt{2g\left(\frac{p_A}{\rho g}-\frac{p_B}{\rho g}\right)}$$

$h=(p_A/\rho g)-(p_B/\rho g)$

$$V_A=\frac{C_v}{\sqrt{\left(\frac{A_A}{A_B}\right)^2-1}}\sqrt{2gh}$$

Енергетска равенка за вискозен флуид



$$pdA-(p+dp)dA-dF_g\sin\theta-dF_T=M\frac{dV}{dt}$$

$$V=V(s)\qquad \frac{dV}{dt}=\frac{dV}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{dV}{ds}V$$

$$dF_T=\tau\cdot dO\cdot ds$$

$$\sin\theta=dz/ds$$

$$-dpdA-\rho\cdot dsdA\cdot g\sin\theta-\tau dOds=\rho\cdot dsdA\frac{dV}{ds}V \qquad /\rho g\cdot dA$$

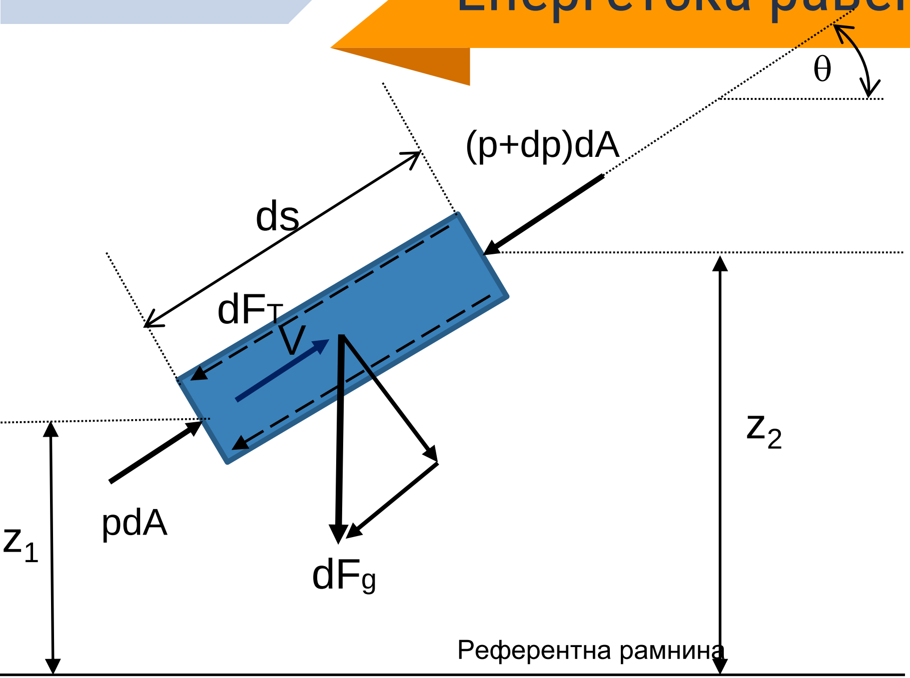
$$-\frac{dp}{\rho g}-ds\sin\theta-\frac{\tau dOds}{\rho gdA}=\frac{VdV}{g}$$

$$ds\cdot\sin\theta=dz$$

$$-\frac{dp}{\rho g}-dz-dh_f=d\left(\frac{V^2}{2g}\right)$$

$$\left(\frac{p_2}{\rho g}-\frac{p_1}{\rho g}\right)+\left(\frac{V_2{}^2}{2g}-\frac{V_1{}^2}{2g}\right)+(z_2-z_1)+h_f=0$$

Енергетска равенка за вискозен флуид



$$\left(\frac{p_2}{\rho g}-\frac{p_1}{\rho g}\right)+\left(\frac{V_2^{\,2}}{2g}-\frac{V_1^{\,2}}{2g}\right)+(z_2-z_1)+h_f=0$$

$h_f=\tau OL/\rho gA$ Вкупен губиток на енергија

$R=A/O$ Хидраулички радиус

A-проточен пресек

O-натопен обем

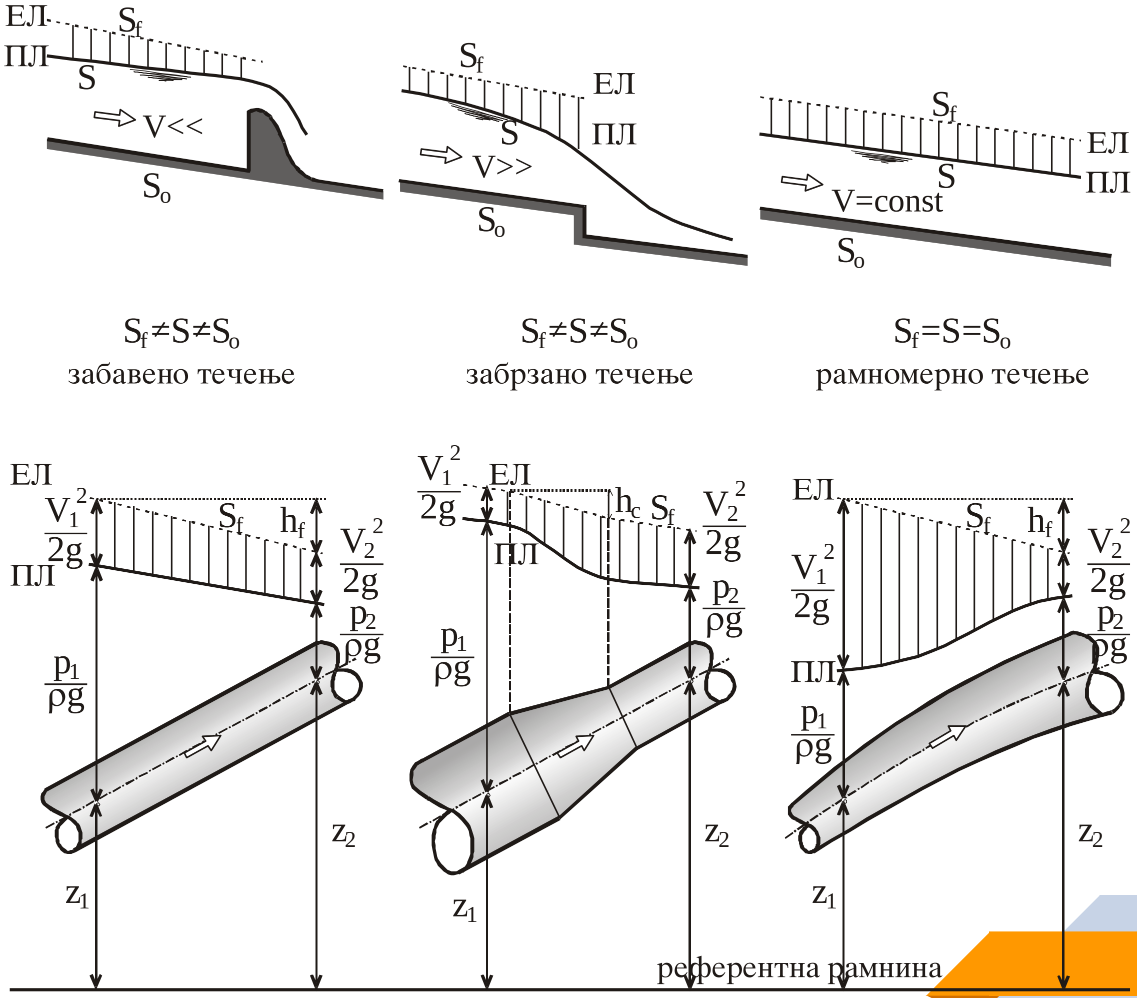
$$h_f=\frac{\tau}{\rho\cdot g}\boxed{\frac{O}{A}}L \qquad =\frac{1}{R}$$

$$h_f=\boxed{\frac{\tau}{\rho\cdot g}\,\frac{1}{R}}L \qquad =S_f$$

$$h_f=S_fL$$

$$S_f=\frac{h_f}{L}$$ Хидраулички градиент

$$\tau=\rho gR\frac{h_f}{L}=\rho gRS_f$$



МЕХАНИКА НА ФЛУИДИ

Видови отпори

Енергетска равенка во пресек А-А и В-В во однос на референтната рамнина за вискозен флуид:

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{V_A^{\ 2}}{2g}+z_A=\frac{p_B}{\rho g}+\frac{V_B^{\ 2}}{2g}+z_B+губитоци$$

Губитоци=Линиски +локални

Резултат на отпорот на триење

Резултат на геометриските промени

Линиски губиток: $h_f = f\frac{L}{4R}\frac{V^2}{2g}$

f- коефициент на триење

L- должина помеѓу пресеците

R-хидраулички радиус (за цефки R=d/4)

V- средна брзина

$$h_f = f\frac{L}{d}\frac{V^2}{2g}$$

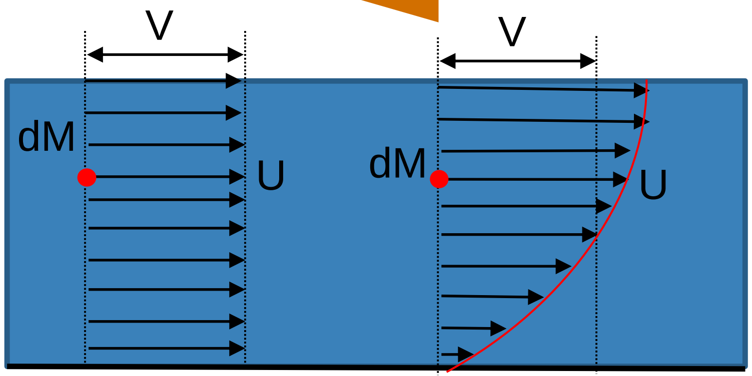
Локални губиток:

$$h_j = k\frac{V^2}{2g}$$

к- коефициент

Видови отпори

Коефициент на кинетичка енергија



$$\begin{cases} E_u = \int_A \rho u dA \dfrac{u^2}{2} = \dfrac{\rho}{2} \int_A u^3 dA \\ E_V = \alpha \rho V A \dfrac{V^2}{2} \end{cases}$$

Кинетичката енергија: $\rho u dA \dfrac{u^2}{2}$

$[kg/m^3][m^3/s][m^2/s^2]=[kgm^2/s^3]=[Nm/s]=Watt$

$$\alpha = \frac{E_u}{E_V} = \frac{1}{AV^3} \int_A u^3 dA$$

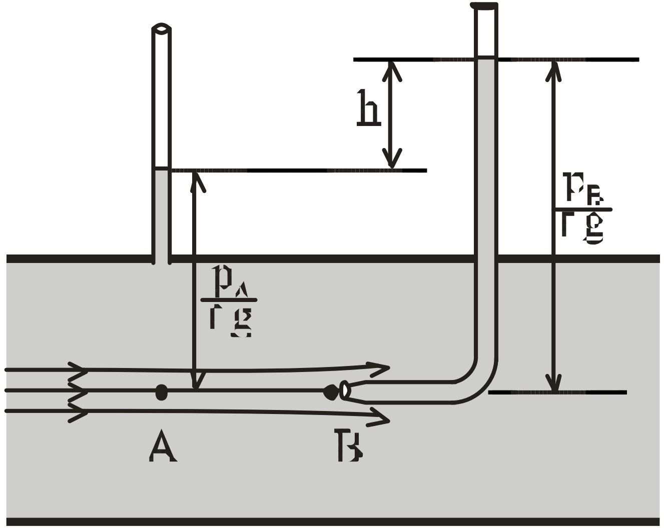
Corriolis-ов коефициент

$\alpha=1.0$ за рамномерен распоред на брзината

$\alpha=1.0–1,15$ за турбулентни течења

$\alpha=2.0$ за ламинарни течења

Практична примена на енергетската равенка-Pitot цевка



Енергетска равенка во пресек A-A и B-B во однос на референтната рамнина:

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A=\frac{p_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B+gubitoci$$

$z_A=z_B=0$

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+0=\frac{p_B}{\rho g}+\cancelto{0}{\frac{V_B^2}{2g}}+0+0$$

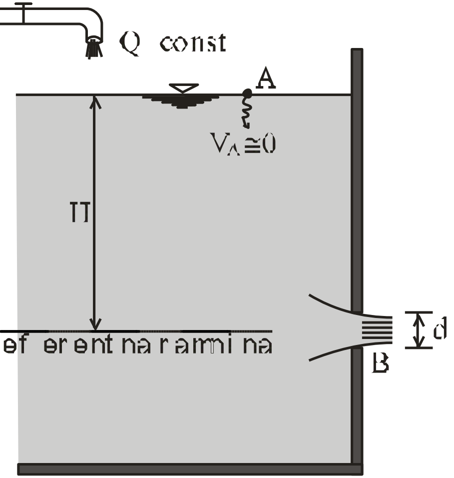
$$\frac{V_A^2}{2g}=\frac{p_B}{\rho g}-\frac{p_A}{\rho g}=h$$

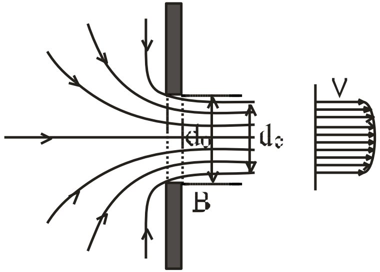
$$V_A=\sqrt{2g\left(\frac{p_B}{\rho g}-\frac{p_A}{\rho g}\right)}=\sqrt{2gh}$$

$$V_A=C_v\sqrt{2gh}$$

C_V<1-Брзински коефициент

Практична примена на енергетската равенка-Мал отвор





Енергетска равенка во пресек A-A и B-B во однос на референтната рамнина:

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A=\frac{p_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B+gubitoci$$

$p_A=p_B=pat$

$$\cancel{\frac{p_A}{\rho g}}+\cancelto{0}{\frac{V_A^2}{2g}}+H=\cancel{\frac{p_B}{\rho g}}+\frac{V_B^2}{2g}+0+h_{влез}$$

$$h_j=h_{vlez}=k_{vl}V_B^2/2g$$

$$H=\frac{V_B^2}{2g}+k_{вл}\frac{V_B^2}{2g}=(1+k_{вл})\frac{V_B^2}{2g}$$

$$V_B=\frac{1}{\sqrt{1+k_{вл}}}\sqrt{2gH}=C_v\sqrt{2gH}$$

C_V<1-Брзински коефициент

Равенка на континуитет:

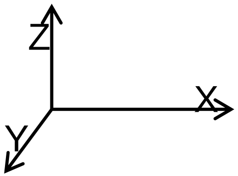
$$Q=A_BV_B=(C_cA_o)C_v\sqrt{2gH}=C_QA_o\sqrt{2gH}$$

C_Q<=Cc.Cv<1- коефициент на протокот

C_C<1- коефициент на контракции

КОЛИЧЕСТВО НА ДВИЖЕЊЕ

$$\left(\sum F\right)dt = MdV \qquad [kgm/s]=[Ns]$$



$$\begin{cases} F_P^{\,x} + F_T^{\,x} + F_g^{\,x} = -\int_A u\rho(udA) + \dfrac{\partial}{\partial t}\int_\forall u\rho d\forall \\ F_P^{\,y} + F_T^{\,y} + F_g^{\,y} = -\int_A v\rho(vdA) + \dfrac{\partial}{\partial t}\int_\forall v\rho d\forall \\ F_P^{\,z} + F_T^{\,z} + F_g^{\,z} = -\int_A w\rho(wdA) + \dfrac{\partial}{\partial t}\int_\forall w\rho d\forall \end{cases} \Rightarrow$$

Стационарно течење

$$\begin{cases} \sum F_x = -\int_A u\rho(udA) \\ \sum F_y = -\int_A v\rho(vdA) \\ \sum F_z = -\int_A w\rho(wdA) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_A u\rho(udA) = \int_A u\rho dQ = \left(\bar{u}\rho Q\right)_2 - \left(\bar{u}\rho Q\right)_1 \\ \int_A v\rho(vdA) = \int_A v\rho dQ = \left(\bar{v}\rho Q\right)_2 - \left(\bar{v}\rho Q\right)_1 \\ \int_A w\rho(wdA) = \int_A w\rho dQ = \left(\bar{w}\rho Q\right)_2 - \left(\bar{w}\rho Q\right)_1 \end{cases}$$

$$\text{ПКД} \pm \text{импулс} = \text{ККД}$$

$$MV_1 \pm \sum F \cdot t = MV_2$$

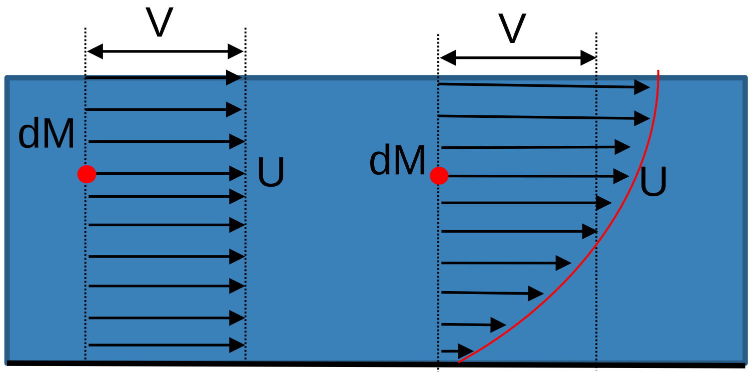
PKD=ПКД=почетно количество на движење

KKD=ККД=крајно количество на движење

Коефициент на количество движење

Елементарно количество на движење:

$$u\rho(u \cdot dA)$$



$$\left\{\begin{aligned} K_u &= \int_A u\rho(udA) = \rho\int_A u^2 dA \\ K_V &= \beta V\rho(VA) \end{aligned}\right.$$

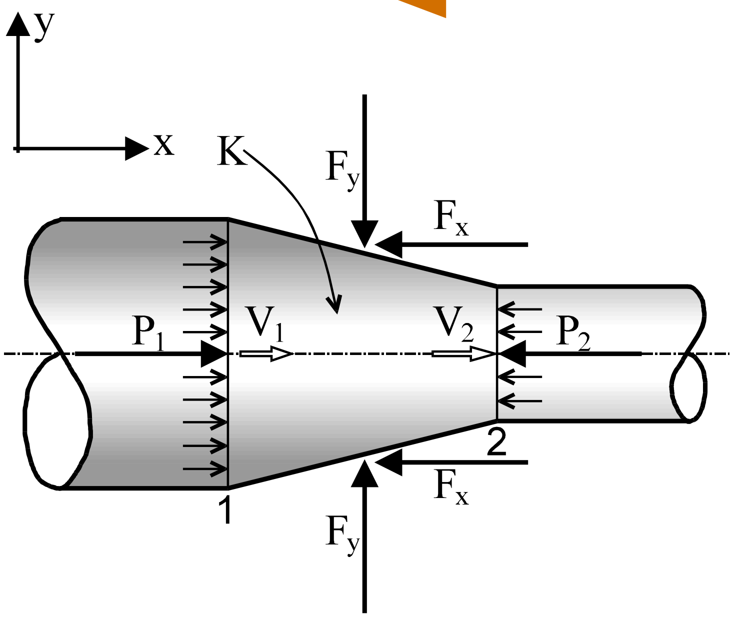
$$\beta = \frac{K_u}{K_V} = \frac{1}{AV^2}\int_A u^2 dA$$

Bousinesque-ов коефициент

β=1.01–1,07 за турбулентни течења во цевки

β=1,33 за ламинарни течења во цевки

Практична примена на равенката за количество на движење



$$\text{ПКД} \pm \text{импулс} = \text{ККД}$$

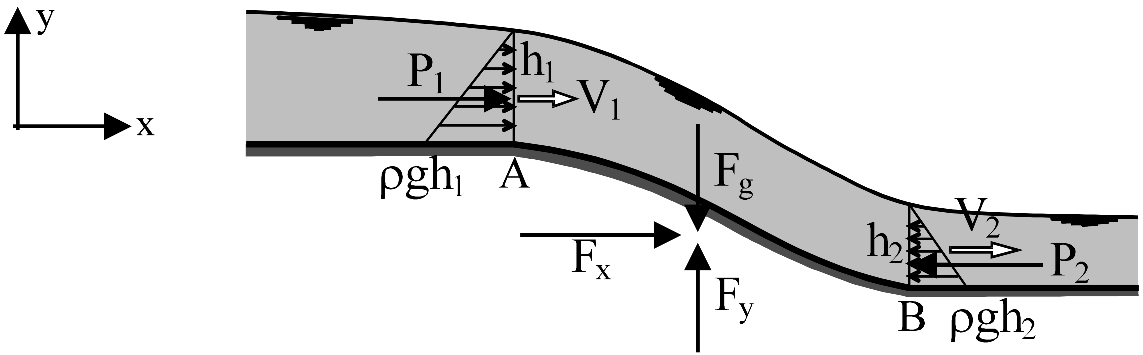
$$MV_{1x} \pm \sum F_x t = MV_{2x}$$

$$\rho Q V_1 + P_1 - P_2 - F_x = \rho Q V_2$$

$$F_x = \rho(A_2 V_2)V_2 - \rho(A_1 V_1)V_1 + p_2 A_2 - p_1 A_1$$

$$F_y = 0$$

Практична примена на равенката за количество на движење



$$MV_1 \pm \sum F_x t = MV_2$$

$$\rho Q V_1 + P_1 - P_2 + F_x = \rho Q V_2$$

$$F_x = \rho(A_2 V_2)V_2 - \rho(A_1 V_1)V_1 - \rho g y_{o1} A_1 + \rho g y_{o2} A_2$$

$$0 \pm \sum F_y t = 0$$

$$0 + F_y - F_g = 0$$

$$F_y = F_g = \rho g \forall$$